

Problème 1

1. D'après Hooke, les allongements des parties sont respectivement :

$$\Delta \ell_1 = \frac{P \ell_1}{E_1 F_1} \text{ et } \Delta \ell_2 = \frac{P \ell_2}{E_2 F_2}$$

2. L'allongement total vaut alors :

$$\Delta \ell = \Delta \ell_1 + \Delta \ell_2 = \frac{P \ell_1}{E_1 F_1} (1 + \varphi) \quad \text{où} \quad \varphi = \frac{E_1 F_1}{\ell_1} \cdot \frac{\ell_2}{E_2 F_2}$$

3. On en déduit la force P

$$P = \frac{1}{1 + \varphi} \cdot \frac{E_1 F_1}{\ell_1} \cdot \Delta \ell$$

avec $\varphi = \frac{120}{210} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{0.8}{0.5} = 1.83$

$$P = \frac{1}{1 + 1.83} \cdot \frac{120 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{0.5} \cdot 0.25 \cdot 10^{-2} = 42.4 \text{ kN}$$

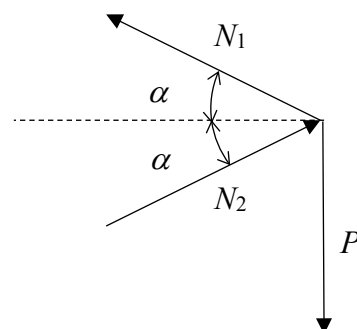
4. Contraintes et allongements relatifs peuvent alors être déterminés :

Partie (1) : $\sigma_1 = \frac{P}{F_1} = 212 \text{ MPa} \quad \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} = 0.177\%$

Partie (2) : $\sigma_2 = \frac{P}{F_2} = 424 \text{ MPa} \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} = 0.202\%$

Problème 2

1. Schéma de l'équilibre des forces au point C



2. L'équilibre selon l'axe horizontal donne

$$N_1 = N_2 = N$$

3. Comme les barres ne travaillent qu'en traction et compression, l'équilibre des forces au point C donne :

$$P = 2N \sin \alpha$$

4. Loi de traction compression. La barre BC est donc comprimée par la force N et se raccourcit de la quantité :

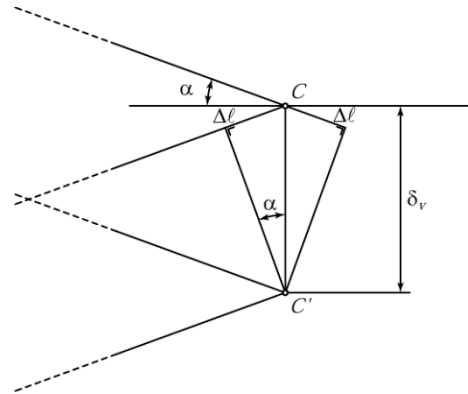
$$\Delta \ell = \ell \varepsilon = \ell \frac{\sigma}{E} = \frac{\ell N}{EF} = \frac{Pb}{2EF} \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

La barre AC est mise en traction par une force de même module N et s'allonge de la même quantité $\Delta \ell$ trouvée précédemment.

5. Déplacement vertical : Si le déplacement est faible, les cercles peuvent être remplacés par leur tangente. Ainsi, le point C se déplace au point C' , comme le montre la figure ci-contre. En utilisant la trigonométrie, on obtient le déplacement vertical suivant :

$$\delta_v = \frac{\Delta \ell}{\sin \alpha} = \frac{Pb}{2EF} \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos \alpha}$$

La figure montre également que le déplacement horizontal est nul au premier ordre



6. Représentation de la fonction $\delta(\alpha)$:

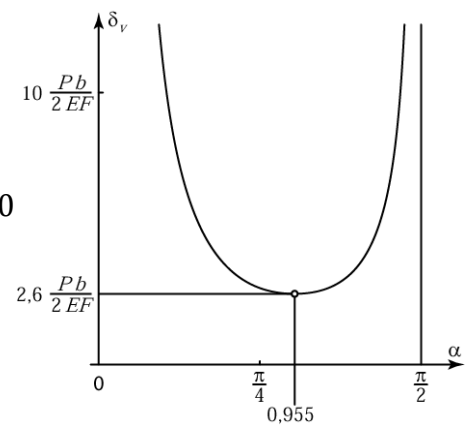
La fonction δ_v est minimum quand $\sin^2 \alpha \cos \alpha$ est maximum :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\sin^2 \alpha \cos \alpha) &= 0 \\ 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha &= (3 \cos^2 \alpha - 1) \sin \alpha = 0 \\ \Rightarrow \cos \alpha &= \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 0,955 \cong 55^\circ \end{aligned}$$

La fonction δ_v présente en plus deux asymptotes verticales :

$\alpha = 0$: le système est statiquement indéterminé

$\alpha = \frac{\pi}{2}$: les barres sont infiniment longues et ont ainsi une rigidité nulle



Problème 3

1. Sous l'effet thermique, le cuivre se dilate davantage que l'acier. L'acier se trouve donc soumis à une force de traction et le cuivre à une force de compression de même valeur absolue. Les allongements sont donc les mêmes et valent :

$$\Delta h_{méca_Ac} + \Delta h_{therm_Ac} = \frac{\sigma_1}{E_1} h + \alpha_1 h \Delta \theta = \Delta h_{therm_Cu} - \Delta h_{méca_Cu} = \alpha_2 h \Delta \theta - \frac{\sigma_2}{E_2} h$$

2. Les forces auxquelles sont soumises respectivement la partie en Acier et la partie en Cuivre sont équivalentes bien que de signe opposé (système fermé)

$$N_{Ac} = |N_{Cu}|$$

Et donc

$$N_{Ac} = \sigma_1 F_1 = N_{Cu} = \sigma_2 F_2$$

3. En combinant ces deux expressions on peut alors exprimer les contraintes comme étant :

$$\sigma_1 = (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{E_1}{1+\mu} \Delta \theta$$

$$\sigma_2 = (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{\mu E_2}{1+\mu} \Delta \theta$$

4. Le déplacement relatif des deux plaques est :

$$\Delta h = h \left(\frac{\sigma_1}{E_1} + \alpha_1 \Delta \theta \right) \text{ ou } \Delta h = h \left(\alpha_2 \Delta \theta - \frac{\sigma_2}{E_2} \right)$$

$$\Delta h = \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{1+\mu} \right) \cdot h \Delta \theta$$

5. Application numérique :

Acier S235 (VSM)

$$E_2 = 210 \text{ GPa} \quad \alpha_2 = 12 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$$

Cuivre recuit (VSM)

$$E_1 = 120 \text{ GPa} \quad \alpha_1 = 17 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$$

$$\mu = 0.7$$

$$\sigma_1 = 24.7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 61.8 \text{ MPa}$$

$$\Delta h = 0.3 \text{ mm}$$